$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Begr.: Übung

$$a^2 + b^2 = (a+ib)\cdot(a-ib)$$

Satz: Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist bzgl. der Addition und der Multiplikation ein Körper.

$\mathbb{K}$ soll künftig für einen beliebigen Körper stehen

zB $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p: Primzahl)

Def. 1.71 IMAGINÄRE EXPONENTIALREIHE/ KOMPLEXE EXPONENTIALREIHE

Für alle reellen Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die imaginäre Exponentialreihe

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \in \mathbb{C}$$

absolut.

Allgemeiner: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die komplexe Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}$$

absolut.

Wenn klar ist, was eingesetzt wird, dann können die Klammern weglassen werden:

$$\exp z := \exp(z)$$

Bem: Üblich ist auch die Schreibweise $e^z := \exp z$

$$\exp(-ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{ix})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{(ix)^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}} = \overline{\exp(ix)}$$

$\Rightarrow \exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$. Für $z = \exp(ix)$ ist zudem

$$|z|^2 \underset{\text{8. Übung}}{=} z \cdot \overline{z} = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix-ix) = \exp 0 = 1$$

$\Rightarrow |z| = |\exp(ix)| = 1$ aber auch $\overline{\exp(ix)} = \frac{1}{\exp(ix)}$

Regeln:

* $\forall_{z_1, z_2 \in \mathbb{C}}: \exp(\underbrace{z_1 + z_2}_{\text{Summe}}) = \underbrace{(\exp z_1) \cdot (\exp z_2)}_{\text{Produkt}}$

  (FUNKTIONALGLEICHUNG)

* Für alle $z \in \mathbb{C}$:

  (i) $\exp z \neq 0$, (sollte z dabei <u>reell</u> sein, dann gilt sogar $\exp z > 0$)

  (ii) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$

  (iii) $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)}$ für $x \in \mathbb{R}$

  $\overset{(ii)}{=} \frac{1}{\exp(ix)}$ $\overset{\text{so.}}{\Longrightarrow} |\exp(ix)| = 1 \Rightarrow \exp(ix) \in \mathbb{E}$ liegt also auf dem Einheitskreis f.a. $x \in \mathbb{R}$

  (iv) $z = a + ib$ $(a = \operatorname{Re} z,\ b = \operatorname{Im} z)$. Dann gilt

  $$\exp z = \exp(a + ib) = \exp(\underbrace{(a + i \cdot 0)}_{a} + \underbrace{(0 + ib)}_{ib})$$

  $$= \underbrace{\exp(a)}_{\substack{\text{reelle} \\ \text{Exp.-Reihe} \\ \in \mathbb{R}}} \cdot \underbrace{\exp(ib)}_{\substack{\text{imag.} \\ \text{Exp.-Reihe} \\ \in \mathbb{C}}} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

  $$= e^a \cdot \exp(ix)$$

Fazit: $\exp z = e^{\operatorname{Re} z} \cdot \exp(i \cdot \operatorname{Im} z)$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die imag. Exp.-Reihe

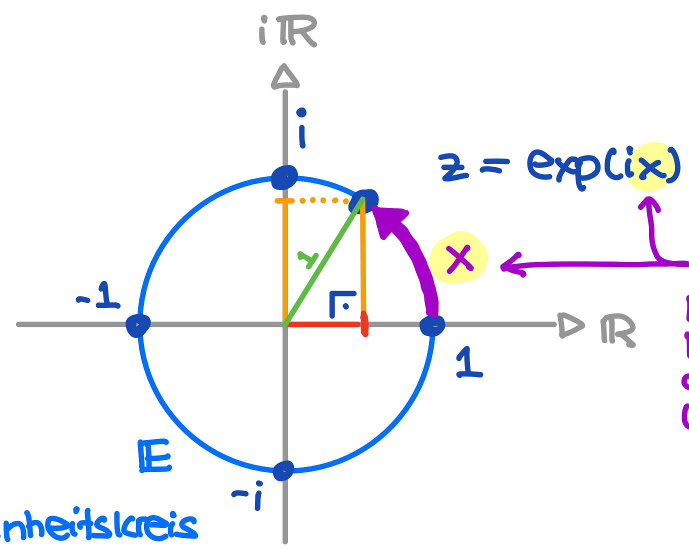
$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$i^0 = 1,\quad i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1,\quad i^5 = i,\quad \vdots \quad i^k = i^{k \bmod 4}$$

$$= \frac{(ix)^0}{0!} + \frac{(ix)^1}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots$$

$$= \frac{x^0}{0!} + i\frac{x^1}{1!} - 1\cdot\frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} \dots$$

$$= \underbrace{\frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots}_{\cos x} + i\cdot\underbrace{\left(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right)}_{\sin x} \in \mathbb{C}$$



$\mathbb{E}$ = Einheitskreis

x: Winkel
Länge des Kreisbogensegments am Einheitskreis (Bogenmaß/Radiant)

x:
$360° = 2\pi$
$180° = \pi$
$90° = \pi/2$
$60° = \pi/3$
$45° = \pi/4$
$30° = \pi/6$

Satz: EULERsche FORMEL

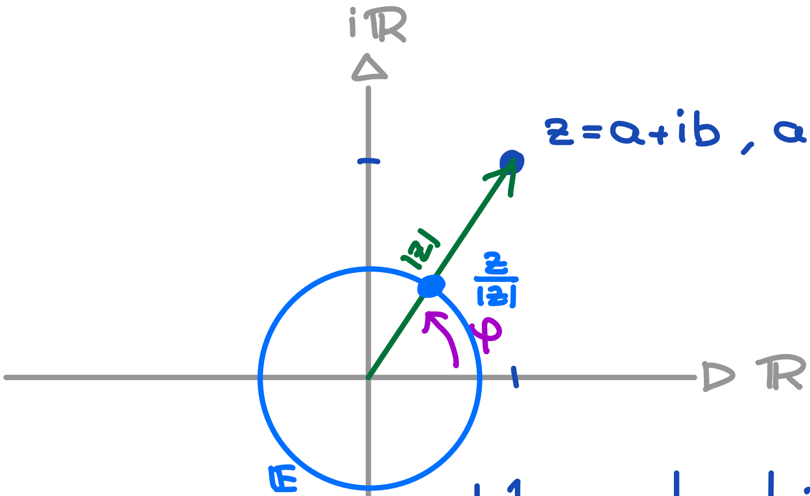
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \cos x\,, \quad \mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sin x$$

bzw.

$$\boxed{\exp(ix) = \cos x + i\cdot\sin x}$$

Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ mit $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ kann nicht davon ausgegangen werden, dass $z \in \mathbb{E}$ gilt, ABER:



$$\left| \frac{1}{|z|} \cdot z \right| = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{\big||z|\big|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

Folge: Die Zahl $\frac{z}{|z|}$ liegt auf dem Einheitskreis.

Daher gibt es einen Winkel φ, sodass

$$\frac{z}{|z|} = \exp(i\varphi) \quad \Big| \cdot |z|$$

$$\Rightarrow \quad z = |z| \cdot \exp(i\varphi)$$

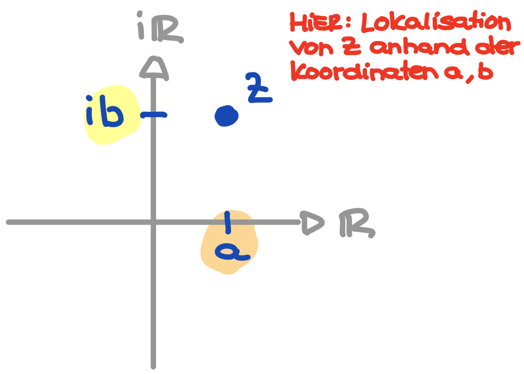
„Polardarstellung, trigonometrische Form"

im Detail:

$$\underset{\substack{\parallel \\ a+ib \;\; (a,b \in \mathbb{R})}}{z} = |z| \cdot \exp(i\varphi) = \overbrace{|z|}^{|z| = r \geq 0} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

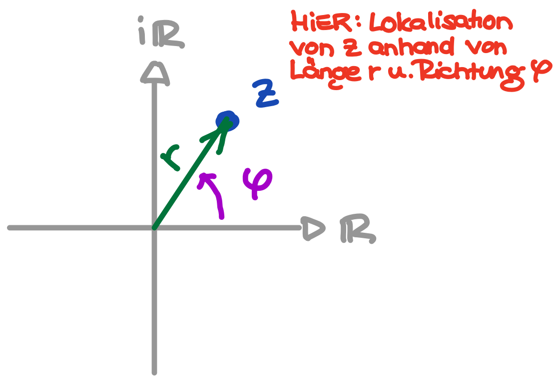
$$= \underbrace{|z| \cos\varphi}_{\operatorname{Re} z} + i\, \underbrace{|z| \sin\varphi}_{\operatorname{Im} z}$$

FAZIT : Es gibt zwei Darstellungsformen für komplexe Zahlen



KARTESISCHE FORM

$z = a + ib$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$
$(a, b \in \mathbb{R})$



POLARFORM

$z = r \cdot \exp(i \cdot \varphi)$
$(r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R})$

Umrechnungen :

POLAR ⟶ KARTESISCH

$z = r \cdot \exp(i\varphi)$, $r = |z|$

$= r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ nach Eulerscher Formel

$= \underbrace{r \cdot \cos\varphi}_{a} + i\, \underbrace{r \cdot \sin\varphi}_{b}$

$\Rightarrow a = \operatorname{Re} z = r \cdot \cos\varphi$, $b = \operatorname{Im} z = r \cdot \sin\varphi$

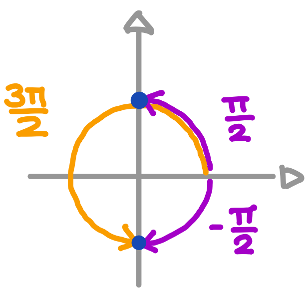
KARTESISCH $\longrightarrow$ POLAR (wird in den Übungen besprochen)

$z = a + ib \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Für φ : Fallunterscheidung

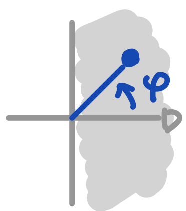
$a = 0$ d.h. $z \in i\mathbb{R}$ auf imaginärer Achse



$$\varphi = \begin{cases} 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \text{ falls } b > 0 & \text{obere Halbebene} \\ 270^\circ = \frac{3\pi}{2}, \text{ falls } b < 0 & \text{untere Halbebene} \end{cases}$$

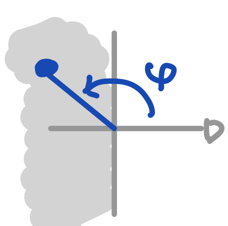
(bzw. $-90^\circ = -\frac{\pi}{2}$)

$a > 0$: rechte Halbebene



$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

$a < 0$: linke Halbebene



$$\varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a}$$

arctan : auf dem Taschenrechner $\tan^{-1}$
(NICHT mit Kehrwert verwechseln)

Taschenrechner : 3 Winkelmaße : DEG, D (Degree) ∟ $= 90^\circ$
RAD, R (Radiant) ∟ $= \pi/2$
GRAD, G (Neugrad) ∟ $= 100$ gon